Анализ практических задач по математике:

теоретическая модель и опыт применения на уроках

Г. С. Ларина

Ларина Галина Сергеевна
аспирант Института образования, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики». Адрес:101000, Москва, ул. Мясницкая, 20. E-mail: glarina@hse.ru

Аннотация. В российских стандартах образования подчеркивается важность для учащихся умения применять школьные знания математики в жизненных ситуациях. Однако сформулированные в стандартах требования к предметным результатам не дают ясного представления о том, как именно учитель математики должен выстраивать свой курс, чтобы сформировать у учащихся такое умение. Поскольку единое определение практической задачи по математике отсутствует, квалифицировать задачи, которые учителя используют на своих уроках, оказывается затруднительно. Проанализированы задачи, с которыми учителя работают на уроках алгебры в средней школе. 83 текстовые задачи закодированы по трем параметрам: ситуационная значимость, математическое моделирование, новизна формулировки. Проведен кластерный анализ с целью выявления типичных групп практических задач. В результате выявлены три типа задач, отличающиеся друг от друга по заданным характеристикам. Только в одном кластере текстовые задачи обладали совокупностью всех трех параметров, свойственных практическим задачам. Таким образом, часть заданий, которые учителя используют на уроках математики в качестве практических, не являются таковыми в соответствии с предложенной автором теоретической моделью.

Ключевые слова: средняя школа, алгебра, практические задачи, обыденный контекст, текстовые задачи по математике, перенос навыка, математическое моделирование.

DOI: 10.17323/1814-9545-2016-3-151-168

Статья поступила в редакцию в июле 2015 г.

Статья подготовлена на основании результатов исследования, проведенного в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» и с использованием средств субсидии на государственную поддержку ведущих университетов Российской Федерации в целях повышения их конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров, выделенной НИУ ВШЭ.

В стандартах образования многих государств подчеркивается чрезвычайная значимость связи школьной математики с жизненными ситуациями. Впервые программа под названием «Обучение реалистичной математике» (Realistic Mathematic Education) появилась в Нидерландах в середине 1970-х годов, а затем многие страны подхватили эту идею и продолжили разработки в этом направлении [Treffers, 1993]. Так, в США и в Великобритании в 1996 г. была создана программа «Математика в контексте» (Mathematics in Context) [National Council of Teachers of

Mathematics, 2006; Dickinson et al., 2011]. А в 1997 г. были введены новые стандарты образования в Норвегии, в них изучение «обыденной» математики стоит в одном ряду с усвоением арифметики, алгебры и геометрии [Royal Ministry of Education, Research and Church Affairs, 1999].

Федеральные стандарты образования в России были изменены в 2010 г., и в соответствии с глобальным трендом в них также был сделан акцент на формировании у учащихся умений использовать знания в повседневной жизни. Так, в Федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования 2010 г. прописаны следующие требования к освоению учащимися школьной программы по математике: «Изучение предметной области „Математика и информатика“ должно обеспечить осознание значения математики и информатики в повседневной жизни». В свою очередь предметные результаты по математике должны отражать «умение моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученные результаты» и «умение применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин».

Стандарты образования определяют требования к предметным результатам, а разработка учебных планов, программ и учебно-методических материалов должна осуществляться с учетом «Фундаментального ядра содержания общего образования» 2011 г. В этом документе разъясняется концепция новых стандартов, и цель изучения математики в школе определяется следующим образом: «Математика позволяет успешно решать практические задачи: оптимизировать семейный бюджет и правильно распределять время, критически ориентироваться в статистической, экономической и логической информации, правильно оценивать рентабельность возможных деловых партнеров и предложений, проводить несложные инженерные и технические расчеты для практических задач».

Таким образом, в двух основных федеральных документах, регулирующих содержание образования в России, подчеркивается важность прикладного преподавания математики в школе. Однако заявленные требования к предметным результатам освоения математики не дают четкого представления о том, как именно учитель должен выстраивать свой курс, чтобы у учащихся сформировалось умение применять математические знания в обыденной жизни.

В логике новых стандартов были изменены и контрольно-измерительные материалы. Сегодня экзамен по математике для 9-го класса состоит из трех модулей: «Алгебра», «Геометрия» и «Реальная математика». В «Спецификации контрольных измерительных материалов для проведения в 2015 г. основного государственного экзамена по математике» задания из модуля «Реальная математика» определяются как «задания, формулировка которых содержит практический контекст, знакомый обучающимся или близкий их жизненному опыту». Раскрывая их цель, авторы Спецификации используют обороты «реальные числовые данные» и «реальные зависимости между величинами». Однако дальнейший текст Спецификации не содержит критериев, на основании которых можно было бы судить о наличии у той или иной задачи практического контекста или связи с жизненным опытом, а также не раскрывает смысл понятия «реальные данные». Поэтому, несмотря на наличие определения, остается неясным, в чем состоит специфичность заданий из модуля «Реальная математика» относительно других задач.

С содержанием экзамена по математике для 11-го класса произошли аналогичные перемены. «Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2015 г. Единого государственного экзамена по математике. Базовый уровень» выдвигает на первое место среди целей тестирования проверку навыка «использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни». Соответственно в ЕГЭ были включены задачи, цель которых обозначена как «проверка освоения базовых умений и практических навыков применения математических знаний в повседневных ситуациях». Однако данное определение тоже не устанавливает критерии, на основании которых формулировку задачи можно расценивать как имеющую или не имеющую отношение к «повседневным ситуациям».

Результаты выполнения такого типа заданий вносят достаточно весомый вклад в итоговый балл обоих экзаменов. Так, в ОГЭ модуль «Реальная математика» — это 7 из 26 заданий теста. Причем выполнение любых двух заданий этого модуля является обязательным для получения минимального порогового балла за экзамен. В ЕГЭ на проверку умения применять полученные знания отводится 4 из 20 заданий теста, а вклад выполнения этих задач в первичный балл по тесту составляет 20%.

Успешность любых образовательных реформ в высокой степени зависит от установок учителей по отношению к проводимым преобразованиям [Thompson, 1992; Barlow, Reddish, 2006; Handal, Herrington, 2003; Hanley, Darby, 2006], и именно неверная интерпретация сути нововведений может стать главной помехой в их реализации [Ross, McDougall, Hogaboam-Gray, 2002]. Препятствием к внедрению новых стандартов образования в России может стать несогласованность в трактовке содержания понятия «практические задачи» участниками образовательного процесса. В отсутствие единого определения учителя опираются при отборе практических задач только на собственные суждения. Например, опрос 62 учителей математики в средней школе показал, что при отборе практических задач для урока они считают их соответствие математической теме более важным критерием, а достоверность практического контекста — второстепенным [Gainsburg, 2008].

Цель данной работы заключается в анализе представлений учителей о задачах, которые позволяют оценить умения учащихся использовать математические знания за пределами школы. Проведенное исследование призвано ответить на следующие вопросы.

- По каким критериям оценивается принадлежность задачи по математике к классу практических задач?
- Какие практические задачи используют учителя математики на уроках?

1. Понятие практической задачи по математике и ее основные свойства

Практические задачи по математике используются на школьных уроках и на итоговых экзаменах во всем мире. И тем не менее единое определение такого типа задач до сих пор не выработано. В разных концепциях эти задания называются реалистическими (real-world problems, realistic problems [Cooper, Harries, 2005; Gainsburg, 2008; Pais, 2013]), задачами на моделирование (modeling tasks [Blum, Borromeo Ferri, 2009; Frejd, 2012]), контекстными задачами [Carvalho, Solomon, 2012; Palm, 2006], повседневными задачами (everyday problems [OECD, 2013]), прикладными задачами (applied tasks [Palm, 2006]). В российской традиции, в частности в спецификациях контрольно-измерительных материалов, их называют практикоориентированными или задачами практической направленности. В настоящей работе мы используем термин «практические задачи» [Фридман, 1977].

Определение и теоретическая модель задают цель и структуру практических задач и поэтому являются необходимыми элементами в процессе их разработки. Более того, только теоретическая модель позволяет разработчикам проверить соответствие запланированного содержания задачи и ее воплощения, иными словами, конструктную валидность практических задач. Теоретическая модель должна содержать единый набор критериев, которые можно использовать для сравнения и оценки практических задач в разных ситуациях их применения. Целью данного обзора является именно выявление набора общих характеристик практических задач.

Существует много определений практических задач, и соответственно много разных характеристик может быть использовано в теоретической модели таких задач. Первый критерий практической задачи, который выделяют во всех исследованиях, — это формулирование ее условий на обыденном языке: ситуация должна быть описана с использованием слов, знаков, случаев, с которыми человек сталкивается каждый день. Однако ежедневные проблемы человека могут быть рассмотрены в неисчислимом множестве контекстов, поэтому необходимо четко определить характеристики обыденных ситуаций, наличие которых позволяет квалифицировать задачу, сформулированную на основе этой ситуации, как практическую.

В международном исследовании PISA практические задачи строятся на основе трех категорий жизненных ситуаций [Watanabe, Ischinger, 2009]. Во-первых, это задачи, которые имеют прямое отношение к повседневному опыту учащегося, например приобретение билета на электричку, покупка продуктов в магазине или чтение инструкции по приему лекарства. Во-вторых, для построения задач используются ситуации, с которыми учащиеся сталкиваются в процессе обучения или столкнутся на рабочем месте, когда повзрослеют. Эти ситуации не сводятся к повседневным бытовым заботам, содержание соответствующих практических задач может быть связано с такими школьными предметами, как биология, химия, география. Наконец, практическая задача может требовать от человека работы с публичной информацией из газет, журналов, телепередач и Интернета.

Вне зависимости от используемой в практической задаче ситуации важно обратить внимание на степень реалистичности происходящего: это могут быть кейсы из жизни учащегося или из жизни общества с включением в текст настоящих имен и событий, а могут быть и задачи с вымышленным контекстом, который не имеет никакого отношения к реальной жизни. Например, в курсе статистики широко распространены задачи, в которых необходимо вычислить вероятность вытаскивания черного или белого шара из мешка. Очевидно, что такая ситуация нерелевантна жизни учащегося [Palm, 2006]. Особняком стоят задачи с так называемым очищенным контекстом, в условии которых нет ненужных для решения подробностей и обстоятельств [Debba, 2011; DuFeu, 2001].

Практическая задача предназначена для того, чтобы учащийся применил при ее решении концепции и процедуры, изученные в школьном курсе математики. Формулирование условий задачи на обыденном языке подразумевает необходимость их перевода на язык математики. Процесс моделирования, или, иными словами, фиксации отношений между объектами задачи, является обязательным этапом в решении любой текстовой задачи, в том числе и практической [Талызина, 1998; Фридман, 1977; Blum, Niss, 1991]. Полученный ответ необходимо оценить с учетом заданных контекстуальных условий, т. е. проинтерпретировать его. Таким образом, первое свойство практических задач — формулирование условий на обыденном языке — фактически подразумевает два обязательных процесса: математическое моделирование и интерпретацию полученных результатов.

Вторым критерием практической задачи является ситуационная значимость контекста: заложенные в него объекты и отношения должны иметь непосредственное отношение к выбранному алгоритму решения и к полученному ответу. Для международного тестирования PISA была разработана вторая таксономия практических задач, основанная на том, в какой степени необходимо использовать контекст при их решении [Watanabe, Ischinger, 2009].

1. Нулевой порядок контекста: задача составлена с использованием обыденной семантики, однако использование контекста не является необходимым условием ее решения.
2. Первый порядок контекста: контекст необходимо учитывать и для решения, и для оценки полученного ответа. (В отличие от второго порядка контекста, в этих задачах отношения между объектами в задаче уже смоделированы, например представлены на графике или в виде формулы.)
3. Второй порядок контекста: контекст задачи также необходим для ее решения и оценки полученного ответа, но учащийся должен еще и самостоятельно построить математическую модель ситуации в данном контексте.

Таким образом, задача, нацеленная на выявление способности учащихся использовать их знания в обыденной жизни, должна обладать двумя характеристиками: быть сформулированной с использованием обыденной семантики и ситуационно значимой.

В дополнение к ним выделяются параметры, характеризующие обстоятельства решения задачи [Palm, 2006]. В обыденной жизни те или иные условия могут способствовать или препятствовать решению задачи. При разработке практической задачи также необходимо учитывать наличие таких деталей, как: 1) есть ли возможность использовать дополнительные инструменты; 2) существуют ли руководства к решению; 3) есть ли возможность получить консультацию, обсудить проблему; 4) установлены ли временные ограничения.

Ю. А. Тюменева [2014] рассмотрела ключевые характеристики реальной ситуации, которые должны быть сохранены в практических задачах. В дополнение к обыденной семантике и ситуационной значимости как критериям практической задачи она предложила следующие два параметра: новизна формулировки задачи и относительная жесткость ее структуры. Под новизной практической задачи понимается отсутствие в ее тексте отсылок к необходимому алгоритму решения, нешаблонность задачи [Jonassen, 1997].

Кроме того, как и в повседневной жизни, задача не может быть жестко структурирована и не может иметь только одно правильное решение [Ibid.]. Однако в школе систему критериев, на основании которых оценивается полученный ответ, вынужденно ограничивают для обеспечения надежности оценки. И поэтому под относительной жесткостью структуры задачи имеется в виду допустимость использования нескольких стратегий решения.

Таким образом, анализ существующих концепций позволил выделить следующие параметры практических задач: обыденная семантика (процессы моделирования и интерпретации), ситуационная значимость, обстоятельства решения задачи, новизна формулировки, относительная жесткость структуры. Они могут быть включены в единую теоретическую модель такого типа задач и служить основой для их разработки.

На формат и содержание любых заданий накладывает определенные ограничения ситуация их применения. Например, при массовой оценке учебных достижений нет возможности обсуждать с кем-либо решение задачи или консультироваться со специалистами, т. е. добиться полного сходства практической задачи и обыденной ситуации по параметру сопутствующих обстоятельств решения в данном случае весьма затруднительно. Рассматривая эту проблему шире, мы сталкиваемся с противостоянием конструктной валидности и надежности инструмента. Максимально полное соответствие учебной задачи характеристикам жизненной ситуации означает, что система оценки результатов будет сложной и запутанной, а значит, такое соответствие работает против возможной стандартизации и надежности инструмента в целом [Wiggins, 1993].

В нашей работе анализируются задачи, которые учителя используют на уроках математики, а не в ситуации экзамена. Обстановка урока в обычной школе также накладывает ограничения на применение всех параметров практических задач. Так, оценить, побуждают ли учащихся интерпретировать полученные результаты, можно только в ходе прямого наблюдения за действиями учителей. Требует ли учитель «обратного перевода» на обыденный язык, поощряет ли использование разных и нетипичных алгоритмов решения — это можно проверить только с помощью включенного наблюдения за поведением учителя и учащегося.

Обстоятельства решения практических задач зачастую не поддаются оценке: был ли ученик ограничен во времени, была ли у него возможность проконсультироваться со специалистами или с одноклассниками, мог ли он воспользоваться дополнительными инструментами? Обстоятельства решения также накладывают определенные ограничения на соответствие практических задач обыденным ситуациям. И выработанная нами теоретическая модель практических задач каждый раз нуждается в пересмотре в соответствии с условиями и целями их применения.

2. Метод исследования

В исследовании были проанализированы задачи, используемые учителями на уроках алгебры в 8-х и 9-х классах. Учителям было предложено провести открытые уроки по теме, соответствующей их текущей учебной программе, при этом было оговорено, что «главной целью данного урока должно являться формирование у учащихся понимания связи между полученными на уроке знаниями и возможностями их применения в повседневном контексте».

В исследовании приняли участие 18 учителей математики в муниципальных общеобразовательных учреждениях восьми регионов Российской Федерации. Классы, в которых были проведены эти уроки, обучаются по базовой программе.

Из заданий, с которыми учителя работали на открытом уроке, мы отобрали 83 текстовые задачи: учителя квалифицировали их как практические и использовали на уроках для иллюстрации применения математики в обыденном контексте. Данные наблюдения за поведением учителей и учащихся при анализе задач мы не учитывали, что накладывает определенные ограничения на результаты исследования.

Анализ текстов отобранных задач был проведен в два этапа. На первом этапе были сформулированы параметры теоретической модели практических задач, учитывающие ограничения выборки. Далее все отобранные задачи были закодированы по этим параметрам.

На втором этапе полученная матрица закодированных данных была проанализирована с помощью кластерного анализа. Данный метод статистического анализа был выбран, так как он позволяет объединить наблюдения в несколько гомогенных кластеров, используя для анализа заданные нами характеристики. Иными словами, кластерный анализ дает возможность выявить типы практических задач, которые учителя используют на уроках математики.

3. Кодировка заданий

Учитывая цели и обстоятельства применения отобранных нами практических задач, для их анализа были использованы три параметра теоретической модели: наличие обыденной семантики (только в части перевода с обыденного языка на язык математики), ситуационная значимость решения задачи и новизна формулировки.

1. Ситуационная значимость. Этот параметр подразумевает значимость используемого в задаче контекста для обыденной жизни учащегося. Контекст может относиться к повседневным бытовым заботам человека, к обучению, а также к сфере взаимодействия человека и общества. Проблемный характер задачи подразумевает, что на основе ее решения могут быть предприняты те или иные действия в данном контексте.

Рассмотрим следующую задачу в качестве примера.

> Сколькими способами агрофирме «Болдино» во время весенней посевной можно посеять рожь, пшеницу, ячмень и кукурузу на четырех вспаханных полях?

Контекстом этой практической задачи является работа агрофирмы, однако поставленный вопрос не является проблемным, так как решение о высадке того или иного зерна на вспаханном поле не связано с количеством способов комбинации этих зерновых культур.

Контекст следующей задачи ситуационно значим, так как по итогам решения могут быть предприняты определенные действия.

> Больной принимает лекарство по следующей схеме: в первый день 5 капель, а в каждый следующий день — на 5 капель больше, чем в предыдущий. Дойдя до нормы 40 капель в день, он 3 дня пьет по 40 капель, а потом ежедневно уменьшает прием на 5 капель, доведя его до 5 капель в последний день. Сколько пузырьков лекарства нужно купить больному, если в каждом содержится 20 мл лекарства, что составляет 200 капель?

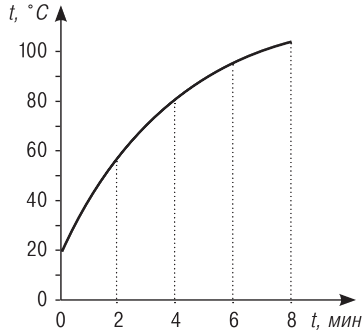
2. Математическое моделирование. Данный параметр подразумевает необходимость перевода условий задачи с обыденного языка на язык математики, например выражения отношений между объектами задачи в виде уравнения. Для решения следующей задачи необходимо обозначить представленные в тексте числа как члены одной последовательности и применить формулу для нахождения суммы арифметической прогрессии.

> При свободном падении тело прошло в первую секунду 5 метров, а в каждую следующую — на 10 метров больше. Найдите глубину шахты, если свободно падающее тело достигло ее дна через 5 секунд после начала падения.

В некоторых случаях в задачах, сформулированных на обыденном языке, нет необходимости применять математические концепции и процедуры, например в заданиях на работу с графиками, таблицами и рисунками. Хотя в них и требуется выявить какую-то закономерность, специальные математические знания для этого не нужны, и поэтому не нужен перевод на язык математики.

> На рисунке построен график нагревания воды по данным, полученным учащимся. Ответьте на следующие вопросы. При какой температуре воды учащиеся начали отсчитывать время? На сколько градусов изменилась температура воды за первые

Рис. 1. **График нагревания воды**



4 минуты? На сколько градусов возросла температура воды за последние 2 минуты наблюдения? (рис. 1)

3. Новизна формулировки задачи. Под новизной формулировки мы подразумеваем отсутствие в ней привязки к шаблонным типам задач, т. е. отсутствие типичных фраз или слов, указывающих на необходимость применения определенного алгоритма решения. Следующая задача содержит типичные формулировки, которые отсылают к необходимому способу решения.

Рабочий выложил плитку следующим образом: в первом ряду 3 плитки, во втором — 5, увеличивая каждый ряд на 2 плитки. Сколько плиток понадобится для 7-го ряда?

Эта задача предполагает применение формулы арифметической прогрессии и часто встречается в учебниках. В упомянутой выше задаче про покупку нужного количества пузырьков лекарства формулировка условий и вопроса задачи не привязана к определенной теме в изучении курса математики.

Каждый параметр нашей теоретической модели является дихотомической величиной: в случае наличия этого признака задаче присваивается код 1, а в случае его отсутствия — 0. Все отобранные задачи были закодированы по трем заданным параметрам одним кодировщиком. Для проверки надежности разработанной теоретической модели трем независимым исследователям было предложено закодировать 25% случайно отобранных задач. Согласованность решений экспертов наблюдалась в 90% случаев, что является приемлемым уровнем и поэтому разработанную систему кодировки можно считать надежной.

4. Кластеры практических задач

В качестве задающих необходимость математического моделирования были закодированы задачи, составляющие 63% совокупной выборки. Ситуационная значимость оказалась присуща лишь 26% задач. Требованию новизны формулировок удовлетворяло только 12% задач. Специфика исследования не позволяла оценить предметное содержание практических задач.

С целью выявления типов практических задач применялся иерархический кластерный анализ. Выбор именно данного метода был обусловлен тем, что поставленная задача типизации является поисковой и количество кластеров изначально не задано. Иерархический кластерный анализ рассматривает каждое наблюдение как отдельный кластер, а затем объединяет его с ближайшим похожим наблюдением в новый кластер. В кластерах объединяются случаи, максимально похожие друг на друга по заданным характеристикам. А сами кластеры являются группами, максимально непохожими друг на друга по тем же самым характеристикам. Данный вид анализа позволяет выявить именно существующие типы заданий, но не связи между наблюдениями, переменными или кластерами.

Кластерный анализ был проведен с помощью статистического пакета SPSS20.0. Основываясь на предположении о наличии кластеров разных размеров, мы выбрали для кластеризации метод взвешенной средней связи (within-groups linkage). Для вычисления расстояния между наблюдениями в кластере был использован метод Dice, так как кластеризуемые переменные являются дихотомическими.

В результате иерархического кластерного анализа были сформированы три группы наблюдений. Выявленные кластеры значительно отличаются друг от друга по заданным параметрам практических задач, которые вошли в основание кластеризации, следовательно, это решение оптимальным образом описывает типы представленных задач.

В табл. 1 показаны количество объектов в каждом кластере и их доля в общем числе наблюдений. Сформированные кластеры различаются по количеству вошедших в них наблюдений, и такое решение является адекватным, поскольку выборка задач не является репрезентативной в отношении разных типов заданий. Мы не контролировали источники, которыми учителя могли воспользоваться для подбора заданий к уроку. Возможно, что одни типы заданий учителям было проще найти, чем другие. Поэтому требование равной количественной наполненности кластеров является нереалистичным.

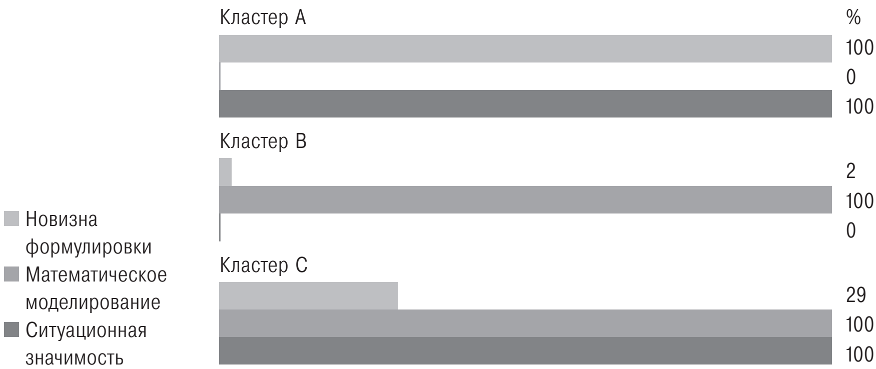
Как видно из рис. 2, задачи, сгруппированные в каждом кластере, характеризуются разными наборами параметров.

Кластер А объединил практические задачи по математике, каждая из которых обладает параметрами новизны формулировки и ситуационной значимости. В то же время для решения этих задач нет необходимости в математическом моделировании: они могут быть сформулированы с использованием обы-

Таблица 1. **Распределение задач по кластерам**

	Число наблюдений в кластере	Доля совокупной выборки (%)
Кластер A	7	8
Кластер B	52	63
Кластер C	24	29
Всего заданий	83	100

Рис. 2. **Процентное распределение параметров практических задач по кластерам**



денной семантики, вопрос может быть значимым для данного контекста, но решение задачи не требует применения математических знаний.

Кластер A в основном представлен задачами на работу с графиками и таблицами, в него вошла, например, задача про график нагревания воды (см. рис. 1). Формулировка задачи заложена в контекст экспериментальной ситуации, привычной для процесса обучения. Однако для решения задачи необходимо считать уже существующую информацию с графика, поэтому в данном случае нет необходимости в математическом моделировании.

В *кластере B* большинство задач обладают только одним параметром: они задают необходимость математического моделирования. Лишь 2% задач дополнительно характеризуются и новизной формулировки, однако этим незначительным процентом целесообразно пренебречь. Задачи этого кластера сформулированы с использованием обыденной семантики и для своего решения требуют перевода условий на язык математики, однако они не обладают ситуационной значимостью, а также сформулированы с использованием типичных слов и фраз, отсылающих к определенному алгоритму решения. Приведем пример задачи данного кластера.

Два велосипедиста одновременно отправляются в 60-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 3 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финалу вторым.

Контекст задачи про велосипедистов обыденный, привычный для жизни учащегося. Однако поставленный в ней вопрос не является проблемным, ее решение нельзя считать важным для ученика. Кроме того, сама формулировка задачи является шаблонной, часто встречается в учебниках по математике и предполагает использование определенного способа действия.

Кластер С представлен задачами, каждая из которых и ситуационно значима, и требует математического моделирования. Однако в этом кластере только 29% задач сформулированы без использования фраз, отсылающих к определенному способу решения. Следующая задача является типичной для этого кластера, причем она обладает всеми заданными нами характеристиками.

В парке предусмотрена железная дорога, движение которой осуществляется по окружности, а также дорожка для велосипедистов, перемещение по которой осуществляется согласно уравнению $y = 0{,}16x^2 - 32x + 1300$. Необходимо определить координаты расположения светофоров для безопасного движения велосипедистов.

Эта задача решается с помощью графиков. Описанная в ней ситуация является вполне рядовой в случае построения маршрутов в парке и поэтому обладает ситуационной значимостью.

5. Выбор учителем практических задач

В условиях введения новых ФГОС и соответствующих изменений в содержании итоговых экзаменов учителя математики вынуждены обращать больше внимания на практические задачи. Однако отсутствие четких критериев принадлежности заданий к этой категории осложняет для них выбор задач, которые нужно использовать для работы на уроке. Целью данного исследования было обобщить представления учителей о практических задачах по математике и определить наиболее распространенные типы этих задач.

В результате проведенного анализа выявлены три группы практических задач, которые значительно отличаются друг от друга в рамках разработанной нами теоретической модели. Так, задачи одного кластера из всех параметров практических задач обладают только одним: они требуют перевода условий задачи с обыденного языка на язык математики, в то время как в другом кластере данный параметр не характерен ни для одной задачи. И только в одном кластере текстовые задачи имели все три характеристики, свойственные практическим задачам. Таким образом, часть заданий, которые учителя используют как практические, не являются таковыми на самом деле.

Задачи всех выявленных типов могут использоваться на уроках математики, однако следует помнить о той цели, которая поставлена перед ними, а именно: оценить умение учащегося применять математические знания в практических жизненных ситуациях. Именно поэтому так важно, чтобы практическая задача была максимально похожа на реальную жизненную ситуацию, т. е. обладала ключевыми характеристиками данного типа задач.

Учитель математики принимает решение о том, какие задачи должны быть использованы на уроке, какие из них подходят для освоения определенной темы и какие формируют необходимые умения и навыки у учащихся. Характеристики практических задач преломляются через призму учительских установок. Так, в нашем исследовании было показано, что при отборе практических задач учителя могут обращать больше внимания на необходимость математического моделирования в одних случаях и на параметр новизны формулировки — в других. Полученные результаты согласуются с выводами другого исследования: в нем выяснилось, что учителя недооценивают значимость такой характеристики задач, как достоверность практического контекста [Gainsburg, 2008].

Отсутствием четкого определения практических задач обусловлено и отсутствие источников, где учителя могли бы найти эти задачи. В помощь учителю математики не издаются методички или пособия, которые содержали бы практические задачи. Кроме того, учителя вынуждены корректировать практические задачи под определенные условия учебной ситуации. Например, существуют математические концепции, которые затруднительно объяснить на материале практических задач, а на слишком абстрактном материале трудно показать применимость математических знаний в реальной жизни. Учитель может упростить практические задания за счет снижения «контекстуального шума», выхолостить их обыденное содержание в пользу стандартизации процесса обучения. С одной стороны, учителя поставлены перед необходимостью самостоятельной разработки заданий, с другой — такая разработка ставит под угрозу валидность и надежность практических задач [Wiggins, 1993].

Способ формирования выборки анализируемого материала обусловливает некоторые ограничения данного исследования. Мы рассматривали только тексты практических задач, без учета результатов наблюдения за контекстом их применения в классе. Не анализируя работу учителя с этими задачами, нет возможности ответить на вопрос, требовал ли он от учащихся обратного перевода полученного ответа на обыденный язык. Невозможно также оценить, допускал ли учитель в процессе решения задачи свободу в выборе стратегии — этот параметр мы называем гибкостью. Таким образом, из теоретической модели практической задачи были исключены два параметра — интерпретация и гибкость.

Отобранные задания были использованы учителями математики в ходе открытого урока. Возможно, в ежедневной практике учителя работают с другими типами практических задач. Кроме того, мы не можем сделать выводы о представленности этих типов практических задач во всей учебной программе для 8-х и 9-х классов.

Итак, в силу особенностей дизайна исследования у нас отсутствуют данные, на основании которых можно было бы сделать несколько важных выводов о практике использования практических задач на уроках математики. Поэтому наблюдение за работой учителя и учащихся с этими задачами, а также возможная стандартизация этого процесса являются перспективными направлениями в данной области исследований.

Литература

1. Талызина Н. Ф. Педагогическая психология. М.: Академия, 1998.
2. Тюменева Ю. А. Задания на «перенос» знаний: теория и практика // Математика в школе. 2014. № 10. С. 3–9.
3. Фридман Л. М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач. М.: Педагогика, 1977.
4. Козлов В. В., Кондаков А. М. (ред.) Фундаментальное ядро содержания общего образования.М.: Просвещение, 2011.
5. Barlow A. T., Reddish J. M. (2006) Mathematical Myths: Teacher Candidates' Beliefs and the Implications for Teacher Education // The Teacher Educator. Vol. 41. No 3. P. 145–157.
6. Blum W., Borromeo Ferri R. (2009) Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learnt? // Journal of Mathematical Modelling and Application. Vol. 1. No 1. P. 45–58.
7. Blum W., Niss M. (1991) Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects — State, Trends and Issues in Mathematics Instruction // Educational Studies in Mathematics. Vol. 22. No 1. P. 37–68.
8. Brown D. F., Rose T. D. (1995) Self-Reported Classroom Impact of Teachers' Theories about Learning and Obstacles to Implementation // Action in Teacher Education. Vol. 17. No 1. P. 20–29.
9. Carvalho C., Solomon Y. (2012) Supporting Statistical Literacy: What Do Culturally Relevant/Realistic Tasks Show Us about the Nature of Pupil Engagement with Statistics? // International Journal of Educational Research. Vol. 55. P. 57–65.
10. Cooper B., Harries V. (2005) Making Sense of Realistic Word Problems: Portraying Working Class «Failure» in a Division with Remainder Problem // International Journal of Research and Method in Education. Vol. 28. No 2. P. 147–169.
11. Debba R. (2011) An Exploration of the Strategies Used by Grade 12 Mathematical Literacy Learners when Answering Mathematical Literacy Examination Questions Based on a Variety of Real-Life Contexts (Master of Education in the School of Science, Mathematics, and Technology Education

Thesis). KwaZulu-Natal: University of KwaZulu-Natal. https://researchspace.ukzn.ac.za/bitstream/handle/10413/5814/Debba_Rajan_2011.pdf?sequence=1&isAllowed=y
12. Du Feu C. (2001) Naming and Shaming // Mathematics in School. Vol. 30. No 3. P. 2–8.
13. Dickinson P., Hough S., Searle J., Barmby P. (2011) Evaluating the Impact of a Realistic Mathematics Education Project in Secondary Schools // Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics. Vol. 31. No 3. P. 47–52.
14. Frejd P. (2012) Teachers' Conceptions of Mathematical Modelling at Swedish Upper Secondary School //Journal of Mathematical Modelling and Application. Vol. 1. No 5. P. 17–40.
15. Gainsburg J. (2008) Real-World Connections in Secondary Mathematics Teaching //Journal of Mathematics Teacher Education.Vol. 11. No 3. P. 199–219.
16. Handal B., Herrington A. (2003) Mathematics Teachers' Beliefs and Curriculum Reform // Mathematics Education Research Journal. Vol. 15. No 1. P. 59–69.
17. Hanley U., Darby S. (2006) Working With Curriculum Innovation: Teacher Identity and the Development of Viable Practice // Research in Mathematics Education. Vol. 8. No 1. P. 53–65.
18. Jonassen D. H. (1997) Instructional Design Models for Well-Structured and Ill-Structured Problem-Solving Learning Outcomes // Educational Technology Research and Development. Vol. 45. No 1. P. 65–94.
19. OECD (2013) PISA 2012. Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy. Paris: OECD.
20. National Council of Teachers of Mathematics (2006) Principles and Standards for School Mathematics. http://www.slideserve.com/melodie-cantu/principles-and-standards-for-school-mathematics
21. Pais A. (2013). An Ideology Critique of the Use-Value of Mathematics //Educational Studies in Mathematics. Vol. 84. No 1. P. 15–34.
22. Palm T. (2006) Word Problems as Simulations of Real-World Situations: A Proposed Framework // For the Learning of Mathematics. Vol. 26. No 1. P. 42–47.
23. Royal Ministry of Education, Research and Church Affairs (1999) The Curriculum for the 10-Year Compulsory School in Norway. Oslo: The Royal Ministry of Education, Research and Church Affairs.
24. Ross J. A., McDougall D., Hogaboam-Gray A. (2002) Research on Reform in Mathematics Education, 1993–2000 // Alberta Journal of Educational Research. Vol. 48. No 2. P. 122–138.
25. Thompson A. G. (1992) Teachers Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research // D. A. Grouwns (ed.) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: Macmillan. P. 100–121.
26. Treffers A. (1993) Wiskobas and Freudenthal: Realistic Mathematics Education //Educational Studies in Mathematics. Vol. 25. No 1. P. 89–108.
27. Watanabe R., Ischinger B. (2009) Learning Mathematics for Life: A Perspective from PISA. Paris: OECD.
28. Wiggins G. (1993) Assessment: Authenticity, Context and Validity // Phi Delta Kappan. Vol. 75. No 3. P. 200–214.

Analysis of Real-World Math Problems: Theoretical Model and Classroom Application

Author

Galina Larina

Postgraduate Student, Institute of Education, National Research University Higher School of Economics. Address: 20 Myasnitskaya str., 101000 Moscow, Russian Federation. E-mail: glarina@hse.ru

Abstract

The Russian education standards stress the importance of real-life applications of mathematics. However, the performance standards do not provide a clear idea of how a math teacher should organize their syllabus to develop such skills in students. As long as there is no universal definition of a real-world math problem, it is rather uneasy to qualify the problems that teachers use in classrooms. We analyzed algebra problems that teachers give to secondary school students. 83 text problems were coded using three parameters: situational importance, mathematical modeling, and novelty of problem posing. We carried out a cluster analysis to identify typical categories of mathematical problems. As a result, we determined three types of problems differing in the abovementioned characteristics. Only one cluster appeared to feature all the tree characteristics typical of real-life word problems. Therefore, part of the problems that teachers give students as real-world fail to qualify as such according to the proposed theoretical model.

Keywords

secondary school, algebra, real-world math problems, everyday context, math word problems, transfer of learning, mathematical modeling.

References

Barlow A. T., Reddish J. M. (2006) Mathematical Myths: Teacher Candidates' Beliefs and the Implications for Teacher Education. *The Teacher Educator*, vol. 41, no 3, pp. 145–157.

Blum W., Borromeo Ferri R. (2009) Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, vol. 1, no 1, pp. 45–58.

Blum W., Niss M. (1991) Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects—State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 22, no 1, pp. 37–68.

Brown D. F., Rose T. D. (1995) Self-Reported Classroom Impact of Teachers' Theories about Learning and Obstacles to Implementation. *Action in Teacher Education*, vol. 17, no 1. P. 20–29.

Carvalho C., Solomon Y. (2012) Supporting Statistical Literacy: What Do Culturally Relevant/Realistic Tasks Show Us about the Nature of Pupil Engagement with Statistics? *International Journal of Educational Research*, vol. 55, pp. 57–65.

Cooper B., Harries V. (2005) Making Sense of Realistic Word Problems: Portraying Working Class "Failure" in a Division with Remainder Problem. *International Journal of Research and Method in Education*, vol. 28, no 2, pp. 147–169.

Debba R. (2011) *An Exploration of the Strategies Used by Grade 12 Mathematical Literacy Learners when Answering Mathematical Literacy Examination Questions Based on a Variety of Real-Life Contexts* (Master of Education in the School of Science, Mathematics, and Technology Education Thesis), KwaZulu-Natal: University of KwaZulu-Natal. Available at: https://researchspace.ukzn.ac.za/bitstream/handle/10413/5814/Debba_Rajan_2011.pdf?sequence=1&isAllowed=y (accessed 10 July 2016).

Du Feu C. (2001) Naming and Shaming. *Mathematics in School*, vol. 30, no 3, pp. 2–8.

Dickinson P., Hough S., Searle J., Barmby P. (2011) Evaluating the Impact of a Realistic Mathematics Education Project in Secondary Schools. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, vol. 31, no 3, pp. 47–52.

Frejd P. (2012) Teachers' Conceptions of Mathematical Modelling at Swedish Upper Secondary School. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, vol. 1, no 5, pp. 17–40.

Fridman L. (1977) *Logiko-psikhologicheskiy analiz shkolnykh uchebnykh zadach* [Logical and Psychological Analysis of Problems Solved at School]. Moscow: Pedagogika.

Gainsburg J. (2008) Real-World Connections in Secondary Mathematics Teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 11, no 3, pp. 199–219.

Handal B., Herrington A. (2003) Mathematics Teachers' Beliefs and Curriculum Reform. *Mathematics Education Research Journal,* vol. 15, no 1, pp. 59–69.

Hanley U., Darby S. (2006) Working With Curriculum Innovation: Teacher Identity and the Development of Viable Practice. *Research in Mathematics Education*, vol. 8, no 1, pp. 53–65.

Jonassen D. H. (1997) Instructional Design Models for Well-Structured and Ill-Structured Problem-Solving Learning Outcomes. *Educational Technology Research and Development*, vol. 45, no 1, pp. 65–94.

Kozlov V., Kondakov A. (eds.) (2011) *Fundamentalnoe yadro soderzhaniya obshchego obrazovaniya* [The Fundamental Nucleus of General Education Curriculum Content]. Moscow: Prosveshchenie.

OECD (2013) *PISA 2012. Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. Paris: OECD.

National Council of Teachers of Mathematics (2006) *Principles and Standards for School Mathematics.* Available at: http://www.slideserve.com/melodie-cantu/principles-and-standards-for-school-mathematics (accessed 10 July 2016).

Pais A. (2013). An Ideology Critique of the Use-Value of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 84, no 1, pp. 15–34.

Palm T. (2006) Word Problems as Simulations of Real-World Situations: A Proposed Framework. *For the Learning of Mathematics*, vol. 26, no 1, pp. 42–47.

Royal Ministry of Education, Research and Church Affairs (1999) *The Curriculum for the 10-Year Compulsory School in Norway.* Oslo: The Royal Ministry of Education, Research and Church Affairs.

Ross J. A., McDougall D., Hogaboam-Gray A. (2002) Research on Reform in Mathematics Education, 1993–2000. *Alberta Journal of Educational Research*, vol. 48, no 2, pp. 122–138.

Talyzina N. (1998) *Pedagogicheskaya psikhologiya* [Pedagogical Psychology]. Moscow: Akademiya.

Thompson A. G. (1992) Teachers Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (ed. D. A. Grouwns), New York: Macmillan, pp. 100–121.

Treffers A. (1993) Wiskobas and Freudenthal: Realistic Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 25, no 1, pp. 89–108.

Tyumeneva Y. (2014) Zadaniya na "perenos" znaniy: teoriya i praktika [Transfer of Learning in Problem Solving: Theory and Practice]. *Matematika v shkole,* no 10, pp. 3–9.

Watanabe R., Ischinger B. (2009) *Learning Mathematics for Life: A Perspective from PISA*. Paris: OECD.

Wiggins G. (1993) Assessment: Authenticity, Context and Validity. *Phi Delta Kappa* International, vol. 75, no 3, pp. 200–214.